Probabilités conditionnelles

1 Introduction

Etude d'un exemple :

Une classe de 35 élèves est composée de 20 garçons et 15 filles. 15 garçons et 7 filles choisissent l'anglais. Les autres choisissent l'espagnol. (Chacun ne choisit qu'une langue)

On note A l'événement : "Il a choisi l'Anglais"

On note B : "C'est un garçon"

On note $A \cap B$: "C'est un garçon **et** il a choisi l'anglais"

Donc $\overline{A}$: "Il a choisi l'espagnol" et $\overline{B}$: "C'est une fille"

1°) Compléter le tableau suivant :

	Anglais A	Espagnol $\overline{A}$	Total
Fille $\overline{B}$			15
Garçon B			20
Total			35

2°) Soit l'événement A/B qui se lit A sachant B c'est à dire "Il a choisi l'anglais sachant de c'est un garçon". P(A/B) se note $P_B(A)$. C'est une probabilité conditionnelle

a) En déduire que $P_B(A)=\frac{3}{4}$

b) Vérifier que $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Solution :

1°)

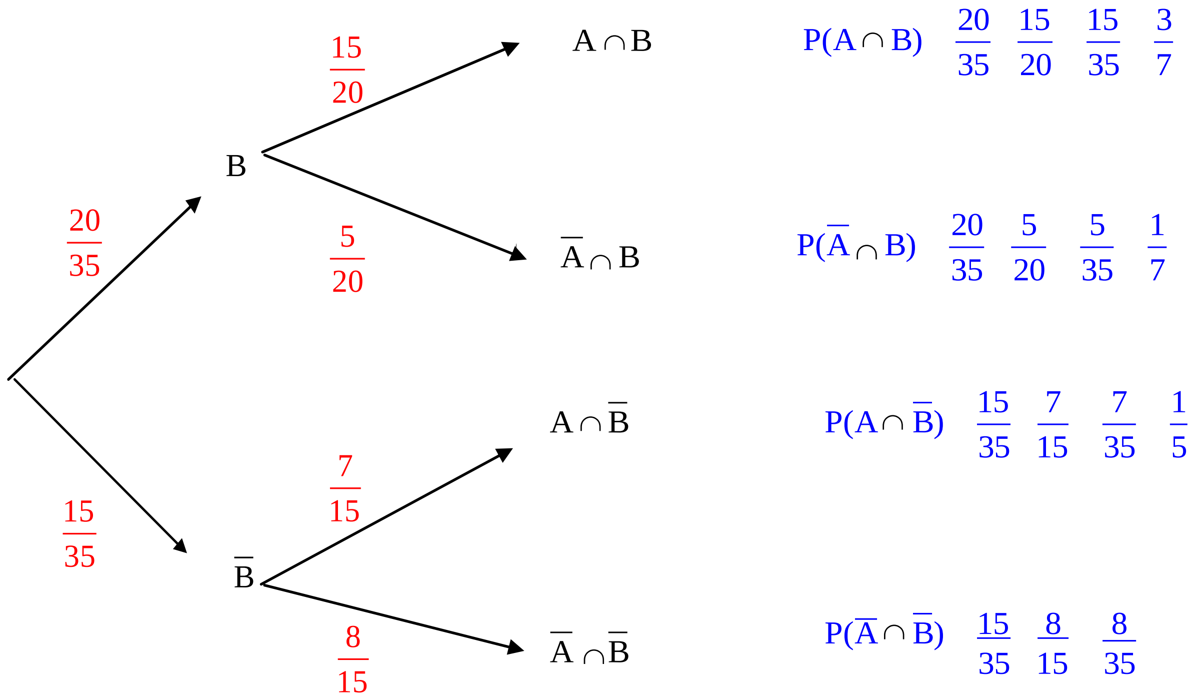
	Anglais A	Espagnol $\overline{A}$	Total
Fille $\overline{B}$	7	8	15
Garçon B	15	5	20
Total	22	13	35

2°) a) D'après le tableau il y a 15 élèves qui ont choisi l'anglais sachant que c'est un garçon sur 20 garçon.

Donc $P_B(A)=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.

b) On a : $P(A\cap B)=\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$ et $P(B)=\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$ donc $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{3}{4}=P_B(A)$

Ensuite on peut faire un **arbre de probabilité**



Exercice

Une urne contient quatre boules blanches et deux boules noires. On effectue un tirage **sans** remise de deux boules. Admettons qu'on peut tirer avec même probabilité chacune des boules de l'urne. Définissons les événements suivants B_1 = *"la première boule est blanche"* et B_2 =*"la seconde boule est blanche"*.

a. Calculer les probabilités $P(B_1)$, $P(B_2|B_1)$, $P(B_2|\overline{B_1})$ et $P(B_2)$.

b. Vérifier que $P(B_1\cap B_2)+P(\overline{B_1}\cap B_2)+P(B_1\cap \overline{B_2})+P(\overline{B_1}\cap \overline{B_2})=1$.

Corrigé

a. $P(B_1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $P(B_2|B_1)=\frac{3}{5}$, $P(B_2|\overline{B_2})=\frac{4}{5}$

et $P(B_2)=P(B_1\cap B_2)+P(\overline{B_1}\cap B_2)=P(B_2|B_1)\,P(B_1)+P(B_2|\overline{B_1})\,P(\overline{B_1})=\frac{2}{5}+\frac{5}{15}=\frac{2}{3}$.

b. Les mêmes calculs pour $P(\overline{B_2})$ donnent ensuite:

$P(\overline{B_2})=P(B_1\cap \overline{B_2})+P(\overline{B_1}\cap \overline{B_2})=P(\overline{B_2}|B_1)\,P(B_1)+P(\overline{B_2}|\overline{B_1})\,P(\overline{B_1})=\frac{4}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{3}$.

Ainsi: $P(B_2)+P(\overline{B_2})=1$.

Probabilités conditionnelles

2 Evénements Indépendants

Exercice 1

On jette 2 dés équilibrés. On appelle

A_1 l'événement : *"le résultat du premier dé est impair"*,

A_2 l'événement : *"le résultat du second dé est impair"*

et A_3 l'événement : *"la somme des 2 résultats est impaire"*.

a. A_1, A_2 et A_3 sont-ils indépendants deux à deux ?
b. A_1, A_2 et A_3 sont-ils indépendants ?

Corrigé

a. On a pour les deux premiers événements $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$. On suppose que les jets des deux dés indépendants, ce qui implique directement que A_1 et A_2 sont indépendants. Notons d'ailleurs que A_1 et $\overline{A_2}$ le sont aussi, de même que $\overline{A_1}$ et A_2, d'où :

$$P(A_1 \cap \overline{A_2}) = P(A_2 \cap \overline{A_1}) = \frac{1}{4}.$$

On peut décrire A_3 de la manière suivante $A_3 = (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (A_2 \cap \overline{A_1})$

et cette union est disjointe, donc $P(A_3) = P(A_1 \cap \overline{A_2}) + P(A_2 \cap \overline{A_1}) = \frac{1}{2}$.

Cette expression donne aussi :

$A_1 \cap A_3 = A_1 \cap \overline{A_2}$, puis : $P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_3)$.

$A_2 \cap A_3 = A_2 \cap \overline{A_3}$, puis : $P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} = P(A_2)P(A_3)$

A_1 et A_3 sont donc indépendants, ainsi que A_2 et A_3 : A_1, A_2 et A_3 sont indépendants deux à deux.

b. Si les résultats des deux dés sont impairs, leur somme est paire, ce qui s'écrit :

$A_2 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$ d'où : $P(A_2 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

donc A_1, A_2 et A_3 ne sont pas indépendants.

Probabilités conditionnelles

Exercice 2

On jette trois pièces équilibrées. Soit A l'événement : *"On a obtenu au plus un pile"*, et B l'événement : *"On a obtenu au moins une fois pile et une fois face"*.

a. A et B sont-ils indépendants ?
b. A et B sont-ils indépendants si l'on jette quatre pièces ?

Corrigé

a. On calcule aisément : $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{3}{4}$.

$A \cap B$ décrit l'événement *"On a obtenu exactement un pile"*

et $P(A \cap B) = \frac{3}{8} = P(A)P(B)$.

A et B sont donc indépendants.

b. De la même manière :$P(A) = \frac{5}{16}$ et $P(B) = \frac{7}{8}$.

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ et $P(A)P(B) = \frac{35}{128}$ et dans ce cas-ci A et B ne sont plus indépendants.

3 Formules de Bayes

Exercice 1

Les pièces fabriquées par une usine sont soumises à un contrôle, mais le mécanisme de contrôle n'est pas entièrement fiable. En effet, si une pièce est bonne elle est acceptée avec une probabilité de 0.9, si elle est défectueuse elle est refusée avec une probabilité de 0.8.

a. Si un lot comprend une pièce défectueuse et trois bonnes pièces, quelle est la probabilité pour que ces quatre pièces soient acceptées lors du contrôle?
b. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait une erreur lors du contrôle d'une pièce si l'on sait qu'il y a en moyenne 20% de pièces défectueuses dans la production ?
c. Quelle est la probabilité pour qu'une pièce acceptée par le contrôle soit défectueuse (si l'on admet de nouveau qu'il y a en moyenne 20% de pièces défectueuses dans la production)?

Corrigé

Soit A l'événement: *"la pièce est acceptée"*, B l'événement: *"la pièce est bonne"*. Remarquons que:

Probabilités conditionnelles

$P(A|B) = 0.9 \quad P(\bar{A}/\bar{B}) = 0.8$.

a. Les 4 pièces sont acceptées, donc le contrôle des 3 bonnes pièces est sans erreur et il y a erreur dans le contrôle de la pièce défectueuse. La probabilité d'un tel événement est:

$P(A|B)^3 \times P(A|\bar{B}) = 0.9^3 \times 0.2 = 0.1458$.

b. Soit E l'événement: *"il y a erreur dans le contrôle d'une pièce"*. Par la formule des probabilités totales:

$P(E) = P(\bar{A}\,|B) \times P(B) + P(A|\bar{B}) \times P(\bar{B})$

Ainsi, puisque $P(\bar{B}) = 0.2$ (20% de pièces défectueuses),

$P(E) = 0.1 \times 0.8 + 0.2 \times 0.2 = 0.12$.

c. Par la formule de Bayes:

$$P(\bar{B}/A) = \frac{0,2 \times 0,2}{0,2 \times 0,2 + 0,9 \times 0,8} = \frac{1}{19}$$

Exercice 2

On admet que 5% des hommes et 0,25% des femmes sont daltoniens. On sélectionne une personne daltonienne au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'il s'agisse d'un homme ? On admettra que les hommes sont aussi nombreux que les femmes. Si au contraire il y avait deux fois plus d'hommes que de femmes, que deviendrait le résultat?

Corrigé

Soit D l'événement *"la personne sélectionnée est daltonienne"*, H l'événement *"c'est un homme"* et F l'événement *"c'est une femme"*. Tout d'abord, par la formule de Bayes:

$$P(H|D) = \frac{P(D|H)\,\mathrm{P}(H)}{P(D|H)\,\mathrm{P}(H) + P(D|\mathrm{M})\,\mathrm{P}(\mathrm{M})}$$

Si on admet que les hommes sont aussi nombreux que les femmes, alors $P(H) = P(F) = \frac{1}{2}$ et

$P(H|D) = \frac{20}{21}$.

Si au contraire il y avait deux fois plus d'hommes que de femmes,i.e. $P(H) = \frac{2}{3}$ et $P(F) = \frac{1}{3}$,

on obtiendrait : $P(H|D) = \frac{40}{41}$.